Visual Memory Chart 三角比・頻出図形問題 凝縮一目瞭然チャート②

例題 円Oに内接する四角形ABCDにおいて，AB＝3，BC＝7，CD＝7，DA＝5，対角線AC，BDとの交点をE,△BCDの内接円の中心をIとする。（図１参照）

① ∠A

△ABDにおいて,余弦定理より

$BD^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos A=34-30\cos A$ ……①

△BCDにおいて,余弦定理より

$BD^2=7^2+7^2-2\cdot7\cdot7\cos(180°-A)=98+98\cos A$ ……②

①－②より

$0=-64-128\cos A \qquad \cos A=-\dfrac{1}{2}$ ……③ $\quad\therefore\ A=120°$

② BDの長さ

③を①に代入して

$BD^2=34-30\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$

BD＞0より， $BD=7$

③ ACの長さ

△ACDにおいて,余弦定理より

$AC^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cos A=74-70\cos A$ …④

△ABCにおいて,余弦定理より

$AC^2=3^2+7^2-2\cdot3\cdot7\cos(180°-A)$

$=58+42\cos A$ ……⑤

④，⑤を解いて， $AC=8$

別解

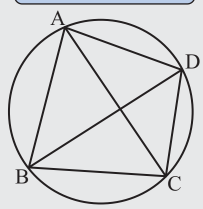
トレミーの定理より

$3\cdot7+7\cdot5=7\cdot AC$

$AC=8$

Point！ これを知っていると超簡単！

トレミーの定理



$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$

対辺の積 同士の和 ＝対角線の積

④ 四角形ABCDの面積S

四角形ABCDの面積をSとする。

S＝△ABD＋△BCD ← 図２参照

$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120°+\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot7\cdot\sin60°=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}(15+49)=16\sqrt{3}$

⑤ 円Oの半径R

正弦定理より $\dfrac{BD}{\sin A}=2R \quad \therefore\ R=\dfrac{7}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{7}{3}\sqrt{3}$

Point！ 円Oの半径は△ABDの外接円の半径R

⑥ △BCDの内接円の半径r

$S=\underbrace{\dfrac{1}{2}\times7\times r}_{緑の面積}+\underbrace{\dfrac{1}{2}\times7\times r}_{青の面積}+\underbrace{\dfrac{1}{2}\times7\times r}_{紫の面積}=\dfrac{1}{2}\times7\times7\times\sin60°$ ← 図３参照

$3r=7\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore\ r=\dfrac{7}{6}\sqrt{3}$

Point！ △ACDの面積を３つに分けて考える！

⑦ sin∠AEB

△BCDは正三角形より，∠CBD＝∠BDC＝60°

また円周角の定理より，∠CBD＝∠CAD，∠BDC＝∠BAC ← 図４参照

∴ ∠CAD＝∠BAC

角の二等分線の性質より

BE：DE＝AB：AD＝3：5

$\therefore\ BE=\dfrac{3}{8}\cdot BD=\dfrac{3}{8}\cdot7=\dfrac{21}{8}$

△ABEにおいて，正弦定理より（図５参照）

$\dfrac{3}{\sin\angle AEB}=\dfrac{BE}{\sin60°}$

$\sin\angle AEB=3\cdot\dfrac{8}{21}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{7}\sqrt{3}$

別解

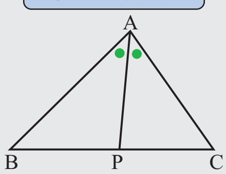
$S=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot7\cdot\sin\angle AEB$

Sは④で求めた → $16\sqrt{3}=4\cdot7\cdot\sin\angle AEB$

$\sin\angle AEB=\dfrac{16\sqrt{3}}{4\cdot7}=\dfrac{4}{7}\sqrt{3}$

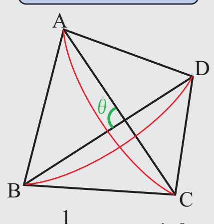
Point！ これを知っていると超簡単！

角の二等分線



AB：AC＝BP：PC

面積の裏技公式



$S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta$

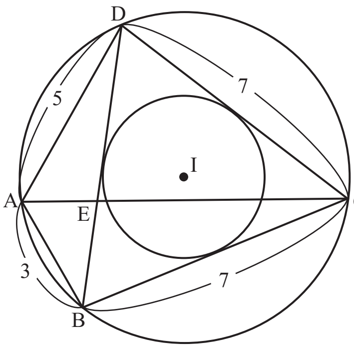


図１

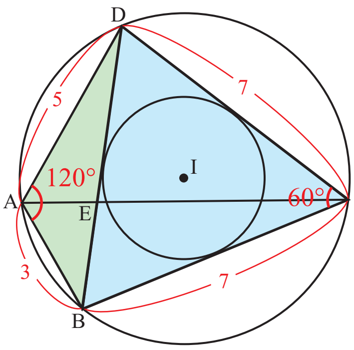


図２

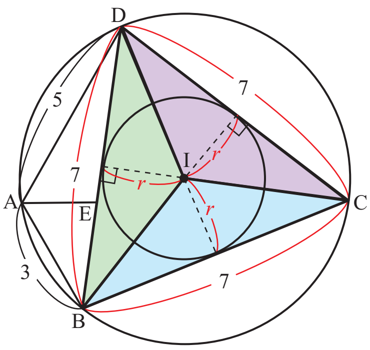


図３

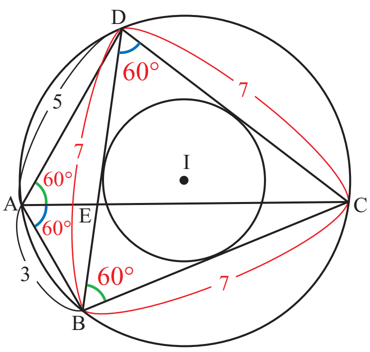


図４

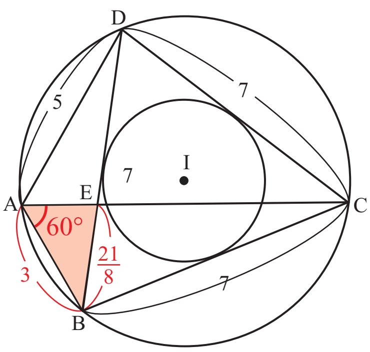


図５