場合の数（確率）ランダムウォーク問題 実践例題①

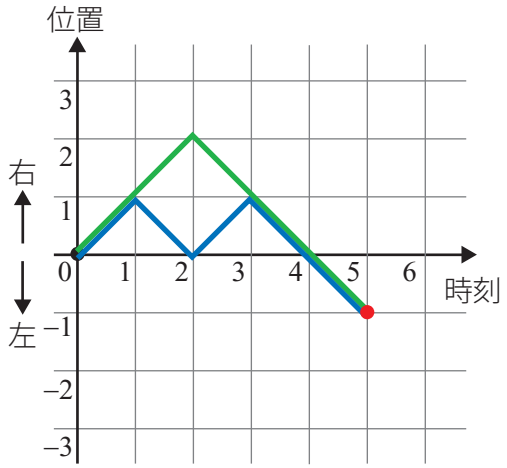
例題 1

点Pは初め数直線上の原点Oにあって，必ず１秒毎に右（正の方向）または左の方向（負の方向）に距離１だけ移動する。右に距離１だけ移動する確率は $\frac{2}{3}$ である。

（１）点Pが５秒後に初めて－１に到達する確率を求めよ。
（２）点Pが６秒後に２にある確率を求めよ。
（３）点Pが３秒後の位置が１で，かつ６秒後は原点Oにある確率を求めよ。（北里大　改）

解答

点Pが左に距離１だけ移動する確率は $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ である。（余事象より）



（１）点Pが５秒後に初めて－１に到達するのは，
右図より，「右，右，左，左，左」または「右，左，右，左，左」の順に移動するときである。

経路は２通り → $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^5}=\frac{8}{243}$ ……（答え）

右に２進む確率　左に３進む確率

（２）右に１だけ移動する回数を x とすると，
左に１だけ移動する回数は，$6-x$ 回となる。
条件より，16秒後の点Pの数直線上の位置は，

$1\cdot x+(-1)(6-x)=2x-6$

点Pが６秒後に２にあるのは

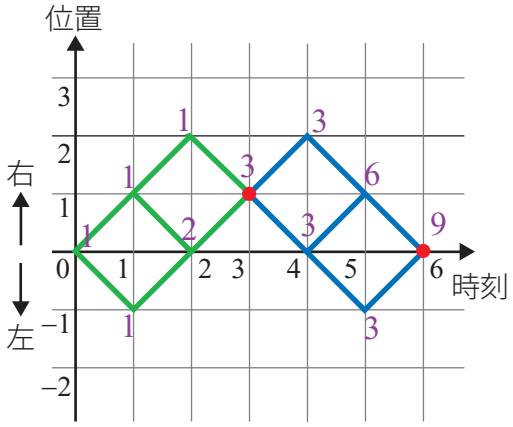
$2x-6=2 \Leftrightarrow 2x=8 \quad \therefore\ x=4$

よって，６回中，右に４回，左に２回移動する場合なので，求める確率は

６回中，右に進む４回を選ぶ → ${}_6C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{15\times 2^4}{3^6}=\frac{80}{243}$ ……（答え）

右に４進む確率　左に２進む確率

（３）点Pが３秒後の位置が１で，かつ６秒後は原点Oにある確率は右図より，９通りの移動の仕方がある。
よって，求める確率は



経路は９通り → $9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$ ……（答え）

右に３進む確率　左に３進む確率

別解

点Pが３秒後の位置が１で，かつ６秒後は原点Oにあるのは，右に２回，左に１回移動したあと，右に１回，左に２回移動するときであるから，求める確率は

$${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\times{}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{3^2\times 2^3}{3^6}=\frac{8}{81}\ \text{……（答え）}$$

右に２回，左に１回移動する確率　右に１回，左に２回移動する確率

確率 ランダムウォーク問題 実践例題②

例題２

数直線上の原点に点Pがある。点Pは，硬貨を投げて表が出れば+1，裏が出れば−1進むとする。
このとき，次の問いに答えよ。
（１）硬貨を10回投げたとき，点Pが+4にいる確率を求めよ。
（２）硬貨を10回投げたとき，点Pが1回目以降原点も負の部分も通らずに+4にいる確率を求めよ。
（山口大）

解答

硬貨を1回投げるとき，表，裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$

硬貨を10回投げたとき，表が出る回数を x とすると，

裏の目が出る回数は $10-x$ 回となる。

条件より，10回の操作後の点Pの数直線上の位置は，

$$1\cdot x+(-1)(10-x)=2x-10$$

（１）硬貨を10回投げたとき，点Pが+4にいるのは

$$2x-10=4 \iff 2x=14$$

$$\therefore\ x=7$$

よって，硬貨を10回投げて点Pが+4にいるのは，10回中，表が７回，裏が３回出る場合なので
よって，求める確率は

表が７回出る確率

10回中，表が出る７回を選ぶ

$${}_{10}\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3={}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{15}{128}\ \cdots\cdots(\text{答え})$$

裏が３回出る確率

（２）硬貨を10回投げたとき，

点Pが１回目以降原点も負の部分も

通らずに+4にいる確率は，

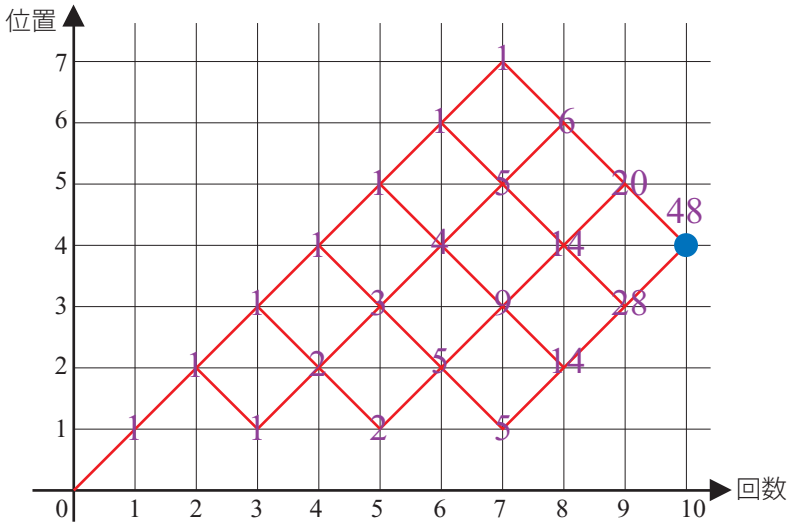
右図より，48通りの移動の仕方がある。

よって，求める確率は

+1，−1進む確率はともに $\frac{1}{2}$ なので

$$48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{3}{64}\ \cdots\cdots(\text{答え})$$

(経路数)×(１つの経路の確率)



確率 ランダムウォーク問題 実践例題③

例題３

動点Pは原点$(0, 0)$から出発して，座標平面の点(m, n)（m, nは整数）の上を動く。
Pが(m, n)にいるとき，さいころを投げて出た目が1または2なら$(m+1, n)$へ，3または4なら$(m-1, n)$へ，5なら$(m, n+1)$へ，6なら$(m, n-1)$へ進む。次の問いに答えよ。
（１）さいころを2度投げて点$(1, 1)$に到達する確率を求めよ。
（２）さいころを4度投げて点$(2, 2)$に到達する確率を求めよ。
（３）さいころを4度投げて点$(1, 1)$に到達する確率を求めよ。（大阪電気通信大）

解答

さいころを1回投げるとき，右に1進む確率は，1または2の目が出る確率より $\frac{2}{6}\left(=\frac{1}{3}\right)$

左に1進む確率は，3または4の目が出る確率より $\frac{2}{6}\left(=\frac{1}{3}\right)$

上に1進む確率は，5の目が出る確率より $\frac{1}{6}$

下に1進む確率は，6の目が出る確率より $\frac{1}{6}$

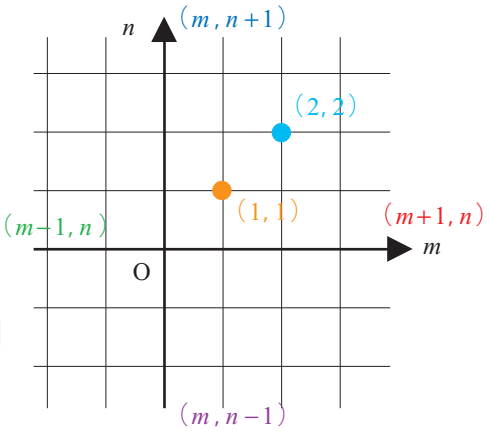
（１）　さいころを2度投げて点$(1, 1)$に到達するのは，2回中「右に1回，上に1回」進むときなので

求める確率は，$_2C_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{9}$

右に１進む確率

上に１進む確率

２回中，右に進む１回を選ぶ



（２）　さいころを4度投げて点$(2, 2)$に到達するのは，
4回中「右に2回，上に2回」進むときなので

求める確率は，$_4C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{2^2}{6^4}=\frac{1}{54}$

右に２進む確率

上に２進む確率

４回中，右に進む２回を選ぶ

（３）　さいころを4度投げて点$(1, 1)$に到達するのは，
（ｉ）4回中「右に1回，上に2回，下に1回」進む場合
（ii）4回中「右に2回，左に1回，上に1回」進む場合 の２通りがある。

（ｉ）のときの確率は，

右，上，上，下を並べる総数は $\frac{4!}{2!}=12$（通り）

同じものを含む順列

n個のもののうち，同じものがそれぞれp個，q個，r個……あるときそれらを一列に並べる順列の総数は

$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$　$(p+q+r\cdots\cdots=n)$

右に１進む確率

よって，求める確率は，$\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\cdot 12=\frac{1}{54}$

下に１進む確率

上に１進む確率

（ii）のときの確率は，

右，右，左，上の並べ方は $\frac{4!}{2!}=12$（通り）

右に１進む確率

よって，求める確率は，$\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\cdot 12=\frac{2}{27}$

上に１進む確率

左に１進む確率

よって，求める確率は，$\frac{1}{54}+\frac{2}{27}=\frac{5}{54}$ ……（答え）

確率 ランダムウォーク問題 実践例題④

例題 4

さいころを投げて出た目の数だけ数直線上を動く点Pがある。Pは負の数の点にあるときは右に，正の数の点にあるときは左に動くものとする。また，Pははじめ−5の点にあり，原点または5の点に止まったら，それ以上さいころを投げることができないとする。

（1）2回目にPが5の点に止まる確率を求めよ。

（2）2回目にPが原点に止まる確率を求めよ。　　（センター試験 改）

解答

1回目に出た目の数をx，2回目に出た目の数をyとする。

（1）　2回目にPが5の点に止まるのは

xが５が出たら原点に止まり終了。
xが６が出たら，次は左に動くので不適。

$x \leqq 4$ かつ　$x+y=10$

これを満たすのは

$x=4$　$, y=6$

よって，１回目に４の目が出て，２回目に６の目が出る確率は

確率は $\frac{1}{6}$　　確率は $\frac{1}{6}$

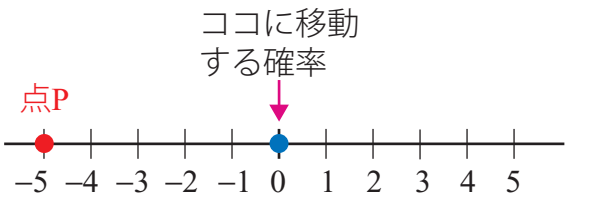
$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$　……(答え)

そして(連続操作)は掛け算

（2）2回目にPが原点に止まるのは

$x \leqq 4$　かつ　$x+y=5$　……①

または，　$x=6$　$, y=1$　……②　のとき。



①を満たすのは

$(x, y)=(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$

①，②より合計５通りある。

よって，求める確率は

$\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot 5=\frac{5}{36}$　……(答え)

確率 ランダムウォーク問題 実践例題⑤

例題 5

x軸上に点Pがある。サイコロを投げて，6の約数の目が出たとき，Pはx軸の正の方向に1だけ進み，6の約数でない目が出たとき，Pはx軸の負の方向に1だけ進むことにする。
点Pは最初原点にあるものとして，次の問いに答えよ。
（1）サイコロを4回投げたとき，$x=2$ の点にある確率を求めよ。
（2）サイコロを4回投げたとき，$x=3$ の点にある確率を求めよ。（関西学院大学　改）

解答

サイコロを１回投げるとき，6の約数の目が出る確率は，1，2，3，6の目が出るときで $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

6の約数の目が出ない確率は，4，5の目が出るときで $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ← 余事象で考えてもよい

サイコロを４回投げたとき，6の約数の目が出る回数をa回とすると，

6の約数の目が出ない回数は$4-a$ 回となり，

４回の操作後の点Pのx軸上の位置は，

$1\cdot a+(-1)(4-a)=2a-4$

（1）４回投げたとき，$x=2$ の点にある確率は，

$2a-4=2$

$\Leftrightarrow\ 2a=6$

$\therefore\ a=3$

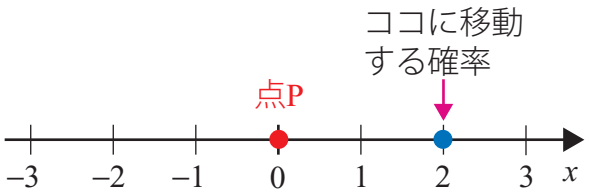
よって，さいころを４回投げたとき，$x=2$ の点にある確率は，４回中，６の約数の目が３回，6の約数の目が出ない回数が１回の場合である。

よって，求める確率は

正の方向に３進む確率

４回中，正の方向に進む１回を選ぶ → ${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)=4\cdot\frac{2^3}{3^4}=\frac{32}{81}$ ……(答え)

負の方向に１進む確率



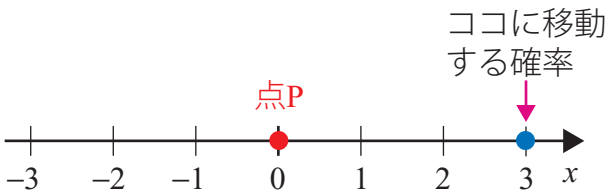
（2）４回投げたとき，$x=3$ の点にある確率は，

$2a-4=3$

$\Leftrightarrow\ 2a=7$

これを満たす正の整数解は存在しない。

よって，求める確率は 0 ……(答え)



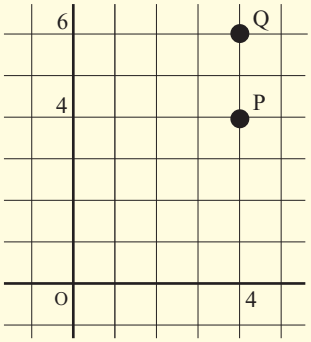
確率 ランダムウォーク問題 実践例題⑥

例題 6

右図のようなます目がある。Aは硬貨を1枚投げて，表が出たら右へ1目盛り，裏が出たら上へ1目盛り進む。Bは別に硬貨を1枚投げて，表が出たら左へ1目盛り，裏が出たら下へ1目盛り進む。A，Bともに，1分ごとに同時にそれぞれ硬貨を投げ，1目盛り進むものとし，6回くり返す。

（1）Aは点O(0, 0)から，Bは点P(4, 4)から同時に出発するとき，点(1, 3)で出合う確率を求めよ。

（2）Aは点O(0, 0)から，Bは点Q(4, 6)から同時に出発するとき，AとBが出合う確率を求めよ。　（大阪教育大学）



解答

硬貨を1回投げるとき，表，裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$

（1）A，Bが点(1, 3)に達するのは，4分後である。

Aは，表が1回，裏が3回出る場合であるから，

4回中，右に進む1回を選ぶ → ${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4\cdot\frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}$

右に1進む確率　左に3進む確率

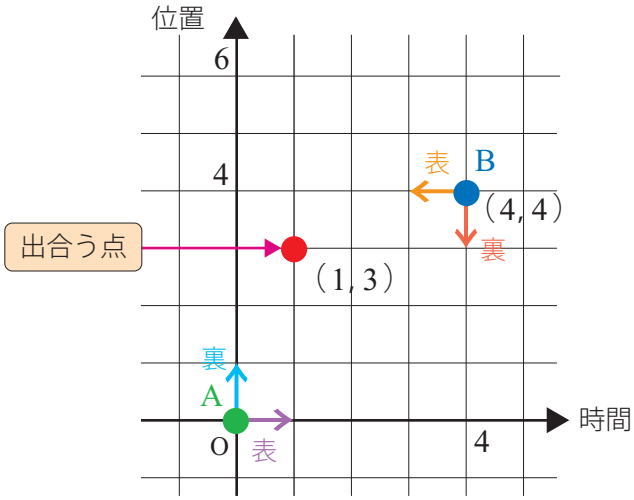
Bは表が3回，裏が1回出る場合であるから，

4回中，左に進む3回を選ぶ → ${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = 4\cdot\frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}$

右に3進む確率　左に1進む確率

これらA，Bは独立試行であるので

求める確率は $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ ……(答え)



（2）OからQへ行くのに10分かかるから，AとBが出合うのは，その半分の5分後となり，

出合う点は(0, 5)，(1, 4)，(2, 3)，(3, 2)，(4, 1)の5個である。

また，対称性から，(0, 5)と(4, 1)，(1, 4)と(3, 2)で出合う確率は同じとなる。

（i）(0, 5)と(4, 1)で出合う確率は

Aが(0, 5)へ行く確率 → ${}_5C_0\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{2^{10}}$

Bが(0, 5)へ行く確率

（ii）(1, 4)と(3, 2)で出合う確率は

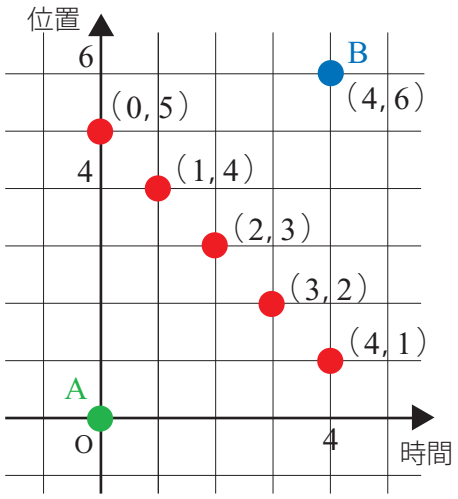
Aが(1, 4)へ行く確率 → ${}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5\cdot\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{10}} = \frac{50}{2^{10}}$

Bが(1, 4)へ行く確率

（iii）(2, 3)で出合う確率は

Aが(2, 3)へ行く確率 → ${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times {}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{10}} = \frac{100}{2^{10}}$

Bが(2, 3)へ行く確率



※赤丸は出合う点

よって，求める確率は $\frac{1}{2^{10}}(5+50+100+50+5) = \frac{105}{512}$ ……(答え)

確率 ランダムウォーク問題 実践例題⑦

例題 7

x軸上を動く点Aがあり，最初は原点にある．
コインを投げて表が出たら正の方向に1だけ進み，裏が出たら負の方向に1だけ進む。
コインを6回投げて，点Aを動かすとき，次の確率を求めよ。
（1）6回の移動後に，点Aが原点に戻る確率
（2）点Aが2回目に原点に戻り，かつ6回目に原点に戻る確率　　（埼玉大　改）

解答

コインを1回投げるとき，表，裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$

コインを6回投げたとき，表が出る回数をxとすると，裏の目が出る回数は，$6-x$ 回となる。

6回の操作後の点Pの数直線上の位置は，

$$1\cdot x+(-1)(6-x)=2x-6$$

（1）6回の移動後に，点Aが原点に戻るのは

$$2x-6=0 \iff 2x=6 \quad \therefore\ x=3$$

よって，コインを６回投げて，原点に戻るのは，６回中，表が３回，裏が３回出る場合なので
求める確率は

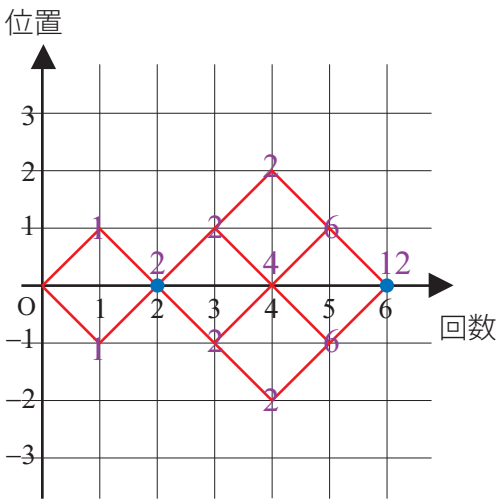
正の方向に３進む確率

６回中，正の方向に進む３回を選ぶ

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}\quad\cdots\cdots(\text{答え})$$

負の方向に３進む確率

（2）点Aが２回目に原点に戻り，かつ6回目に原点に戻る確率は，
右図より，12通りの移動の仕方がある。
よって，求める確率は



正・負の方向に進む確率はともに $\frac{1}{2}$ なので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot12=\frac{3}{16}\quad\cdots\cdots(\text{答え})$$

経路は12通り

別解

点Aが2回目に原点に戻り，かつ6回目に原点に戻る場合は，
「２回目までで，表が１回，裏が１回出る」かつ
「２回から６回までで表が２回，裏が２回出る」
場合なので，求める確率は

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{16}$$

２回目までで，表が１回，裏が１回出る確率

３回から６回までで表が２回，裏が２回出る確率

確率 ランダムウォーク問題 実践例題⑧

例題８

点Pははじめ数直線上の原点Oにあり,さいころを1回投げるごとに,偶数の目が出たら数直線上を正の方向に3,奇数の目が出たら負の方向に2だけ進む。10回さいころを投げるとき,次の問いに答えよ。
（１）点Pが原点Oにある確率を求めよ。
（２）点Pの座標が19以下である確率を求めよ。（北里大・改）

解答

さいころを1回投げるとき,偶数,奇数の目が出る確率はともに $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

さいころを10回投げたとき,偶数の目が出る回数を x とすると,

奇数の目が出る回数は $10-x$ 回となり,10回の操作後の点Pの数直線上の位置は,

$3x+(-2)(10-x)=5x-20$

（１） さいころを10回投げて,Pが原点Oにあるのは,

$5x-20=0 \iff 5x=20 \qquad \therefore\ x=4$

よって,さいころを10回投げて点Pが原点Oの位置にあるのは,

10回中,偶数の目が4回,奇数の目が６回出る場合である。

よって,求める確率は

偶数の目が４回出る確率

10回中,偶数の目が出る回を４回を選ぶ

$${}_{10}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{105}{512}\quad\cdots\cdots(\text{答え})$$

奇数の目が６回出る確率

（２） さいころを10回投げて,Pの座標が４以下になる場合は

$5x-20\leqq4 \iff 5x\leqq24$

$\therefore\ x\leqq\frac{24}{5}$

x は,整数で $0\leqq x\leqq10$ より,上記を満たす x は,$x=0,1,2,3,4$

よって,求める確率は

$${}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^9+{}_{10}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8+{}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_{10}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=\left({}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_4\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ でくくることがポイント！

$$=\left(1+10+45+120+210\right)\frac{1}{2^{10}}=\frac{193}{512}\quad\cdots\cdots(\text{答え})$$